Uke 41

Sekventer

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består av to endelige multisets (bager) av utsagn Γ og Δ.

- Γ kalles antesedenten, Δ kalles suksedenten i sekventen $\Gamma \vdash \Delta$
- Vi skriver Γ, F for unionen av Γ med utsagnet F
- Aksiom: sekvent med et felles utsagn i antesedent og suksedent. Det er altså av formen $\Gamma, F \vdash \Delta, F$

Ellers bruk Roger Antonsens forelesninger fra høsten 2008

Regler

For hvert konnektiv (og senere – for hver kvantor) har en to regler – for antesedent og for suksedent.

$\wedge$-antesedent: $\dfrac{\Gamma, F, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \wedge G \vdash \Delta}$ $\wedge$-suksedent: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, F \quad \Gamma \vdash \Delta, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \wedge G}$

$\neg$-antesedent: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, F}{\Gamma, \neg F \vdash \Delta}$ $\neg$-suksedent: $\dfrac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg F}$

$\vee$-antesedent: $\dfrac{\Gamma, F \vdash \Delta \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \vee G \vdash \Delta}$ $\vee$-suksedent: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, F, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \vee G}$

$\rightarrow$-antesedent: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, F \quad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \rightarrow G \vdash \Delta}$ $\rightarrow$-suksedent: $\dfrac{\Gamma, F \vdash \Delta, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \rightarrow G}$

I reglene $\wedge$-suksedent, $\vee$-antesedent og $\rightarrow$-antesedent har en to premisser og en konklusjon. De andre reglene har et premiss og en konklusjon.

Utledning, bevis og falsifikasjon

En utledning er et tre av sekventer bygd opp ved reglene over.

- Over hver løvnode som er et aksiom skriver vi • over – og kaller noden for lukket
- Over hver løvnode som ikke er et aksiom og der alle utsagn er atomære skriver vi ° over – og kaller noden for åpen

Et bevis er en utledning der samtlige løvnoder er lukket. En falsifikasjon er en utledning der en av løvnodene er åpen.

De to tolkninger av kalkylen – analyse og syntese

Ved analyse tolker vi kalkylen nedenfra og oppover, mens i syntese tolker vi den ovenfra og nedover.

- Analyse: Vi starter med sekventen i konklusjonen og prøver systematisk å falsifisere den – dvs gjøre samtlige utsagn i antesedenten sanne og samtlige utsagn i suksedenten usanne. Dette sprer seg oppover med reglene. Hvis en konklusjon lar seg falsifisere, så også en av premissene. Tilslutt håper vi å komme til en åpen løvnode. Siden den ikke er et aksiom lar den seg opplagt falsifisere.
- Syntese: En sekvent er gyldig om gitt alle utsagnene i antesedenten er sanne, så er minst et av utsagnene i suksedenten sann. Nå ser vi at ethvert aksiom – dvs enhver lukket node – er gyldig. Dette sprer seg nedover med reglene. Om premissene i en regel er gyldige, så er også konklusjonen gyldig.

Legg merke til at analyse- og syntese-tolkningene er ganske forskjellige – ting som er disjunktivt i den ene tolkningen er konjunktivt i den andre. Men de er begge tolkninger av samme kalkyle – vi gjør de samme regnestykkene.

Fullstendig utledning

Vi legger merke til at reglene er slik at vi alltid mister konnektiver i overgangen fra konklusjon til premiss. Det betyr at utledninger i utsagnskalkyle må før eller siden stoppe opp. Siden vi av og til har to premisser til en konklusjon kan vi risikere å få eksponensiell vekst – men vi må stoppe opp straks vi har tatt vekk alle konnektivene – det er bare atomære utsagn i sekventene i løvnodene. Disse løvnodene blir enten åpne eller lukkete. Dvs en fullstendig utledning er enten et bevis eller en falsifikasjon.

Kompletthet av utsagnskalkyle

Det er usikkerhet i en fullstendig utledning av en sekvent. Kan det ikke tenkes at valget av når regler brukes i konstruksjonen av den fullstendige utledningen spiller en rolle – noen valg fører til at vi får et bevis mens andre valg gir en falsifikasjon? Dette er ikke tilfelle.

- Anta at vi har en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en tolkning **T** som gjør samtlige utsagn i Γ sanne og samtlige utsagn i Δ usanne.
- Anta videre at vi har en fullstendig utledning **U** over $\Gamma \vdash \Delta$
- Da vil tolkningen **T** spre seg oppover i **U** med reglene.
- I hver regel hvis konklusjonen blir falsifisert av **T**, så vil også en av premissene blir falsifisert av **T**.
- Da vil minst en av løvnodene i **U** bli falsifisert av **T** – og **U** er en falsifikasjon
- Denne løvnoden er åpen og inneholder akkurat det som trengs for at **T** blir en falsifikasjon

Et par observasjoner

- I en tolkning skal en ta stilling til sannhetsverdien til samtlige atomære utsagn
- Vår løvnode tar bare stilling til de sannhetsverdiene som trengs for å få til en falsifikasjon
- Det kan være mer effektivt når vi ikke trenger finne ut så mye om en falsifikasjon
- For størrelsen av den fullstendige utledningen kan rekkefølgen i hvilke regler som brukes først spille stor rolle